Istituto Nazionale di Fisica Nucleare

Laboratori Nazionali di Frascati

# Relatività Speciale

Danilo Babusci

Stage Estivi LNF 2013

# Riferimenti Inerziali

**Sistema di Riferimento**: sistema di coordinate (3 spaziali + 1 temporale) solidale con osservatore (riferimento di quiete)

**Riferimento Inerziale (R.I.)**: qualunque riferimento in cui una particella libera si muove di moto rettilineo uniforme (con velocità costante)

Quanti **R.I.** ? **Infiniti** → Possibile stabilire in quale **R.I.** mi trovo ?

**NON** con le leggi della **Meccanica**

# Principio di Newton (1687)

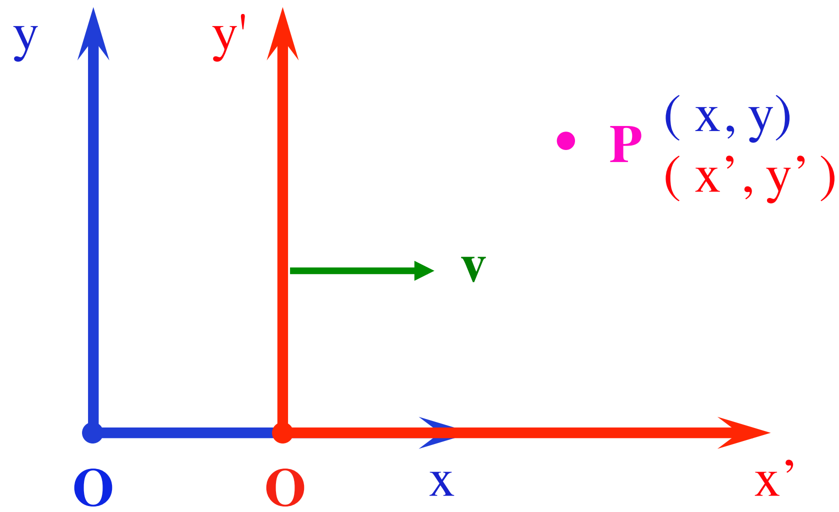
Corpo in moto rettilineo uniforme: **non** esiste effetto meccanico (all'interno del corpo) che può essere usato per misurarne la velocità

**velocità assoluta è priva di significato**

⬇

la velocità **non** può intervenire nelle equazioni della **Meccanica**: eq. **covarianti** (non cambiano forma) per trasformazioni tra **R.I.** (trasformazioni Galileiane)

# Trasformazioni Galileiane




$$x' = x - v\,t$$

$$y' = y$$

$$t' = t$$

**( t = 0 → O ≡ O )**

invarianza della **massa** ⇒ $F' = m\,a' = m\,a = F$

# Fenomeni Elettromagnetici

**Maxwell** (1860) - equazioni di campo che dipendono esplicitamente da una velocità, quella della **luce**

→ NON covarianti per trasformazioni Galileiane

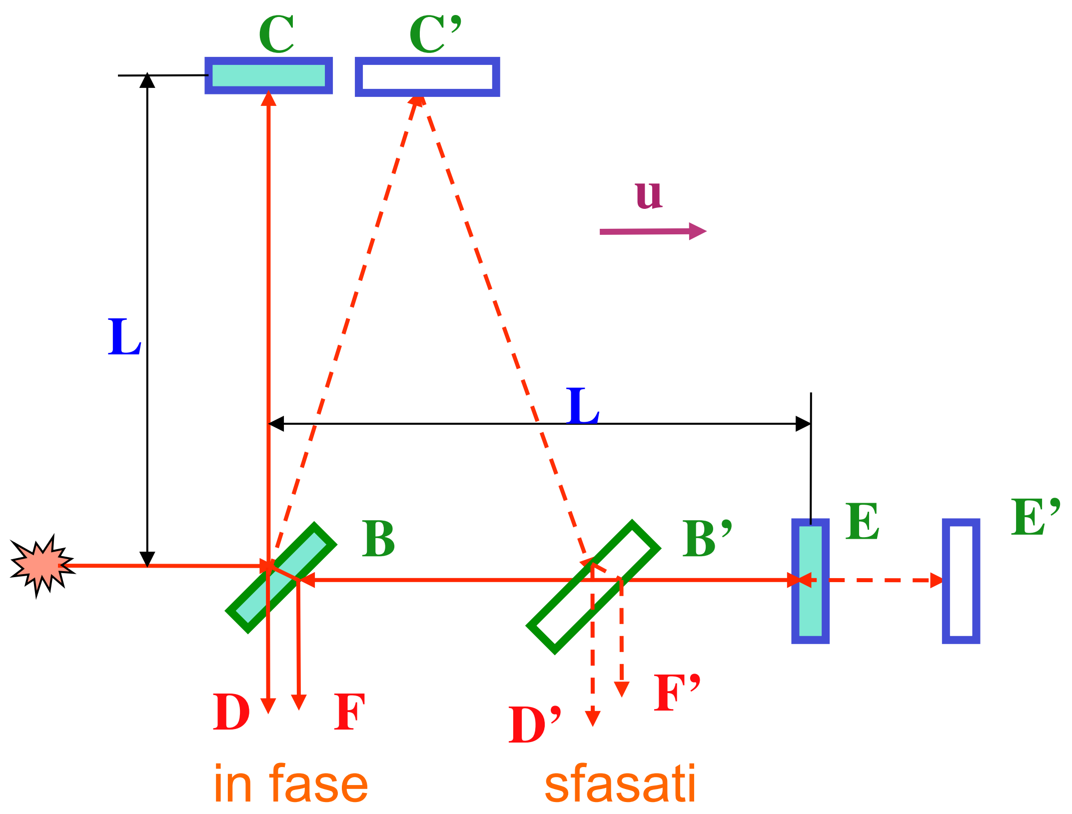
Analogia meccanica - esiste mezzo di supporto alla propagazione della luce: **ETERE**

**Ipotesi**: eq. di Maxwell valide soltanto nel **R.** dell'etere

↳ **esiste R. privilegiato che riempie tutto lo spazio**

# Michelson & Morley (1887)

**Misura del moto della Terra rispetto all'etere**




**Interferometro (ITF)**

$t_1$ : B – E – B

$t_2$ : B – C – B

# Michelson & Morley

**ITF** immobile nell'etere ( $t_1 = t_2$ ) : Interferenza D-F costruttiva

**ITF** in moto nell'etere ( $t_1 \neq t_2$ ) : Interferenza D-F distruttiva

$$t_1 = t_{\mathrm{BE}} + t_{\mathrm{EB}}$$

$$t_{\mathrm{BE}} = \frac{L}{c-u} \qquad t_{\mathrm{EB}} = \frac{L}{c+u}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{2\,(L/c)}{1-(u/c)^2}}$$

$$t_2 = t_{\mathrm{BC}} + t_{\mathrm{CB}}$$

$$t_{\mathrm{BC}} = t_{\mathrm{CB}} = \frac{(L/c)}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$\boxed{t_2 = \frac{2\,(L/c)}{\sqrt{1-(u/c)^2}}}$$

# Michelson & Morley

Confronto espressioni di $t_1$ e $t_2$

- Numeratori - quanto impiegherebbe la luce a percorrere ciascun braccio qualora l'ITF fosse immobile: =

- Denominatori - modifiche nei tempi di percorrenza indotte dal moto dell'interferometro: ≠

$$\frac{u}{c} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = t_1 - t_2 > 0$$

**N.B.** impossibile costruire bracci di uguale lunghezza → rotazione di 90º dell'apparato → slittamento delle frange d'interferenza

# Michelson & Morley

Osservazione sperimentale: NO slittamento nelle frange

$$\Delta t = 0$$

velocità della luce **identica** nei due bracci $\longrightarrow$
velocità della Terra attraverso l'etere non rivelabile

Due (sgradevoli) alternative :

1) Eq. di Maxwell sono sbagliate, oppure propagazione della luce non è la stessa nei diversi **R.I.**
2) Trasformazioni Galileiane non applicabili, qualcosa di sbagliato nella meccanica di Newton

# Lorentz & FitzGerald (1889)

Corpi in moto si contraggono lungo la direzione del moto

(e soltanto lungo questa)

$$L \;\rightarrow\; L' = L\sqrt{1-(u/c)^2}$$

→ **ITF:** BC inalterata; BE diminuisce

→ $$\boxed{t_1 \;\rightarrow\; t_1' = \frac{2\,(L/c)}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = t_2}$$

Ipotesi ad hoc : no teoria fondamentale per la contrazione

# Einstein (1905)

NON-covarianza delle eq. di Maxwell è molto più sgradevole dell'assenza di un riferimento assoluto

→ **Postulati della Relatività Speciale**

**P1 - leggi della natura sono le stesse in tutti i R.I.**

preservato dalle eq. di Maxwell se e solo se

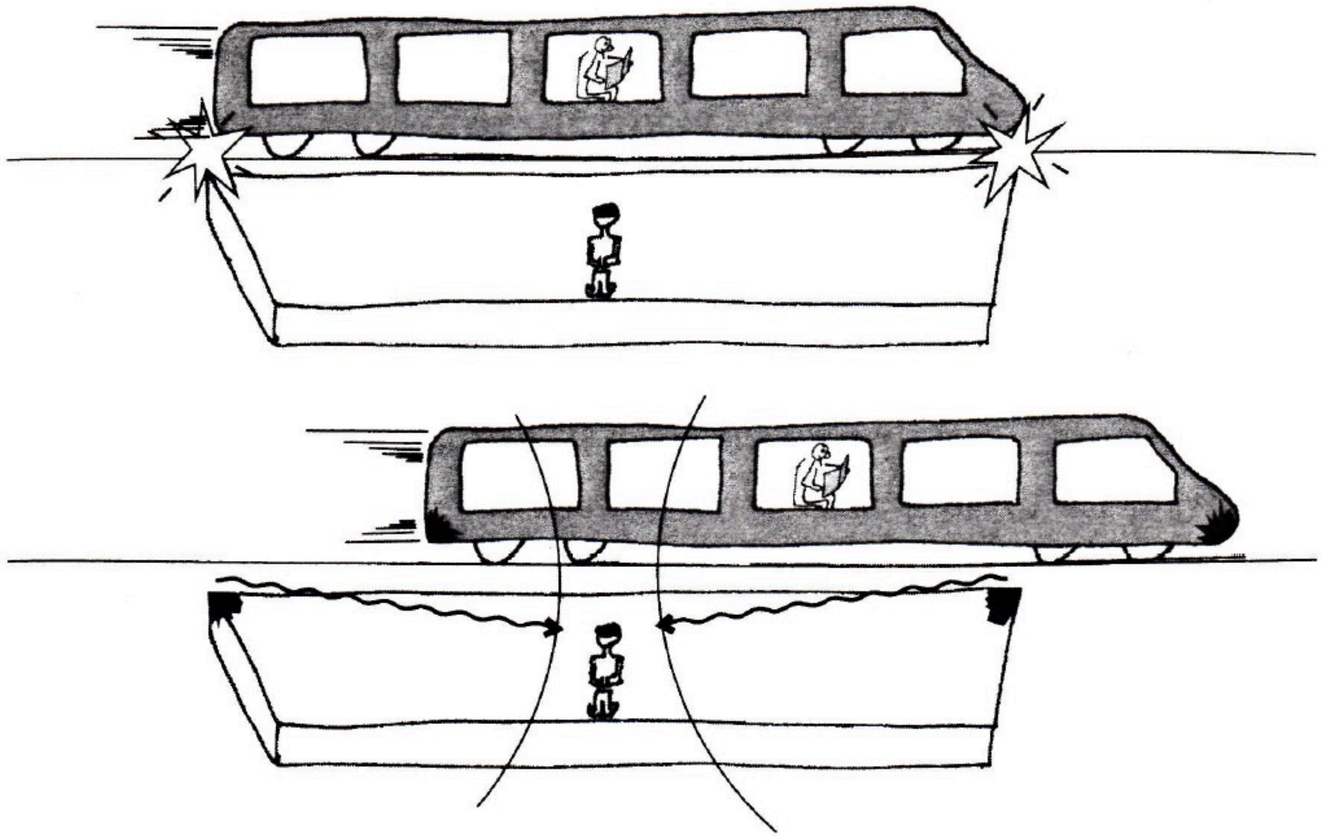
**P2 - velocità della luce è la stessa in tutti i R.I.**

che spiega il risultato nullo dell'esperimento M & M

→ eq. di Maxwell ≡ in tutti i **R.I.** : **Etere non esiste**

# Conseguenze di P2

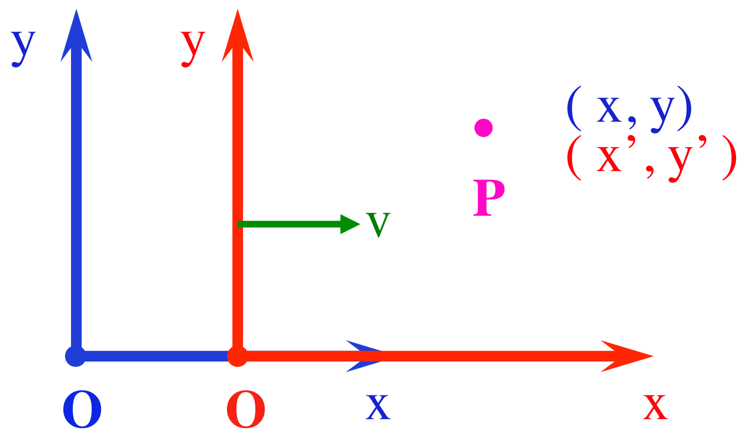
Treno di
Einstein



**relatività della simultaneità**

# Conseguenze di P2

Trasformazioni tra riferimenti inerziali sotto cui le leggi della fisica sono covarianti: trasformazioni di **Lorentz**




$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma\,(x - v\,t) \\
y' &= y \\
t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right)
\end{aligned}
$$

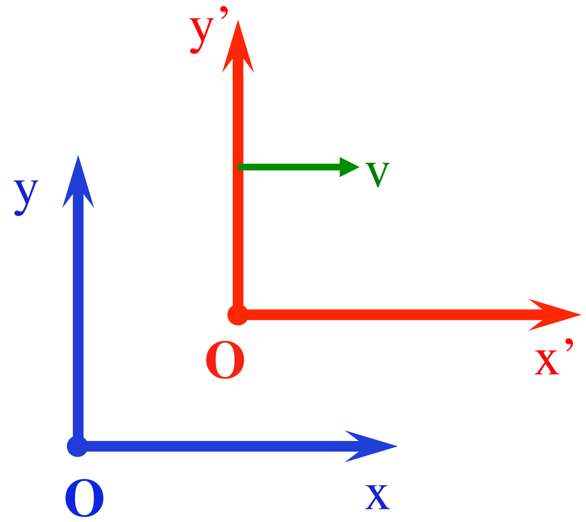
**( t = 0 → O ≡ O )**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Variabili spazio e tempo mescolate → nuova entità

**spaziotempo**

# Conseguenze di P2




$$x' = \gamma\,(x - v\,t)$$
$$t' = \gamma\,(t - \tfrac{v}{c^2}\,x)$$

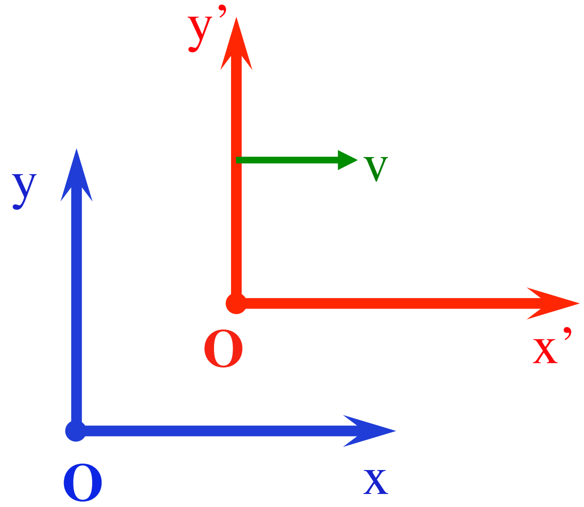
- regolo fermo in K' → lunghezza $\Delta x' = L_0$

  lunghezza $\Delta x = L$ in K: misura richiede osservazione simultanea dei due estremi del regolo, i.e., $\Delta t = 0$

$$\Rightarrow \qquad \Delta x' = \gamma\,\Delta x \qquad \rightarrow \qquad L = \frac{L_0}{\gamma}$$

corpi in moto si contraggono lungo la direzione del moto

# Conseguenze di P2




$$x' = \gamma\,(x - v\,t)$$
$$t' = \gamma\,(t - \tfrac{v}{c^2}\,x)$$

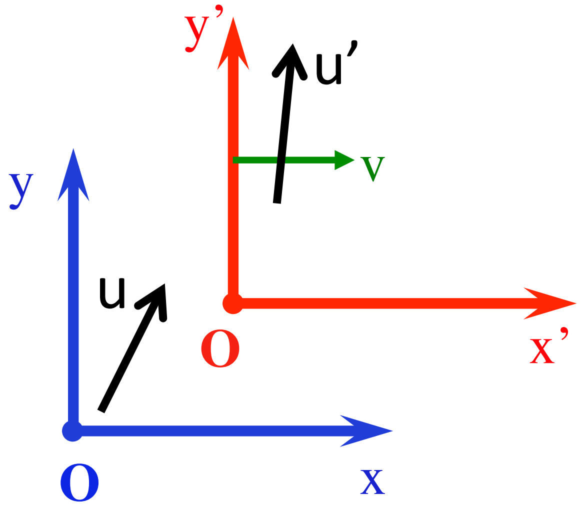
- orologio fermo in K' → eventi che avvengono nello stesso punto (Δx' = 0) ma separati con Δt' ≠ 0

$$\Rightarrow \qquad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\Delta x' = 0 \;\rightarrow\; \Delta x = v\,\Delta t \;\rightarrow\; \Delta t' = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

i.e. $\quad \Delta t = \gamma\,\Delta t'$ ritmo orologio in moto è più lento

# Trasformazione della velocità




$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - v\,t) \\ t' &= \gamma\,(t - \tfrac{v}{c^2}\,x) \end{aligned}$$

vettore velocità: $\vec{u} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \quad \rightarrow \quad \vec{u}\,' = \left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \frac{\Delta y'}{\Delta t'}\right)$

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma\,(\Delta x - v\,\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x\right) \end{aligned}$$

# Trasformazione della velocità

$$u'_x = \frac{\Delta x - v\,\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,u_x}$$

$$u'_y = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x\right)} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2}\,u_x}$$

NB – $\vec{u} = (c, 0) \quad \Rightarrow \quad u'_x = \dfrac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,c} = c\,, \qquad u'_y = 0$

i.e., la velocità della luce è invariante per trasformazioni di Lorentz

# Composizione delle velocità

inversione della legge di trasformazione precedente:
v → - v ⊕ u ↔ u'

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

↓

punto di vista diverso: legge di composizione delle velocità

NB – $u'_x = c \quad \rightarrow \quad u_x = c$ i.e., la velocità della luce è invalicabile

# Spaziotempo

- Spazio Euclideo 4-dimensionale $\rightarrow$ distanza tra punti vicini

$$A = (w, x, y, z) \qquad B = (w + \Delta w, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

$$\boxed{\Delta s^2 = \overline{AB}^2 = (\Delta w)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

intervallo

metrica: (+,+,+,+)

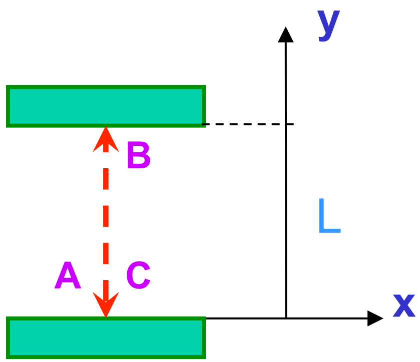
- Spaziotempo $\rightarrow$ distanza tra eventi vicini

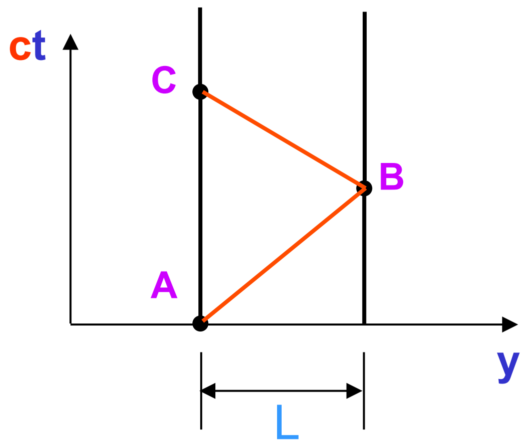
$$w = ct$$

quale metrica ?

# Spaziotempo

Riferimento inerziale K $\rightarrow$ orologio di luce: 2 specchi paralleli in quiete tra cui si propaga avanti indietro un raggio luminoso



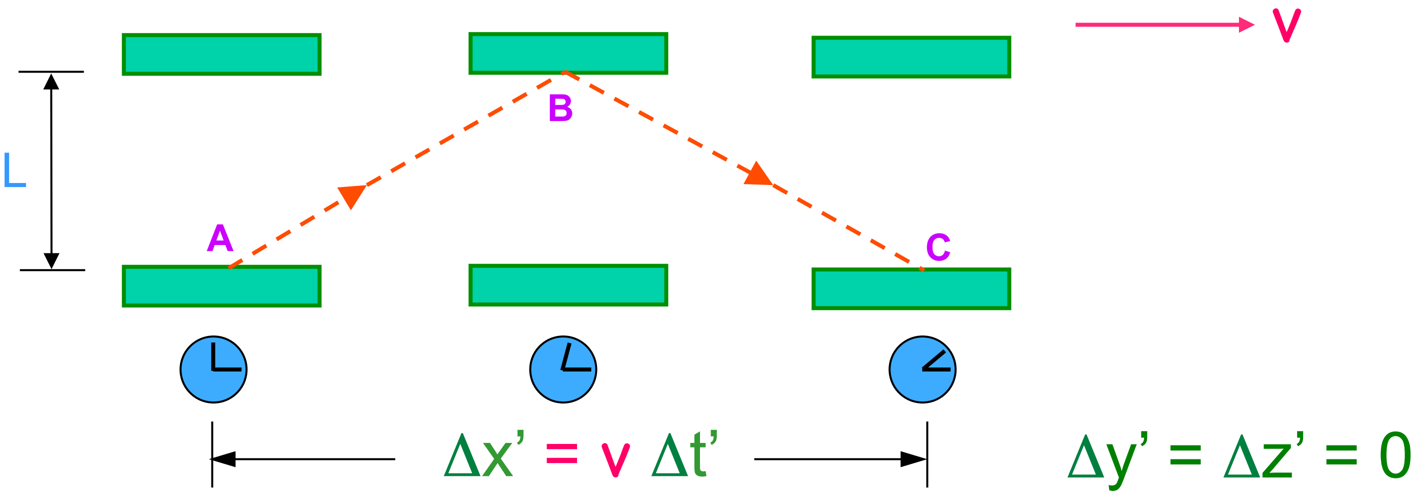




$$\Delta t = t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{A}} = \frac{2\,L}{c}$$

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$$

# Spaziotempo

Analisi del funzionamento dell'orologio in un riferimento inerziale K' che si muove con velocità v lungo -x




Cammino percorso dalla luce tra **A** e **C** = $2\sqrt{L^2 + (\Delta x'/2)^2}$

# Spaziotempo

P2 $\longrightarrow$ $$\Delta t' = \frac{2}{c}\sqrt{L^2 + (\Delta x'/2)^2}$$

$$(c\,\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = 4\,L^2 = (c\,\Delta t)^2$$

$\Delta$x = 0 in K $\longrightarrow$ $$(c\,\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

i.e. $\boxed{\Delta s^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}$ è invariante

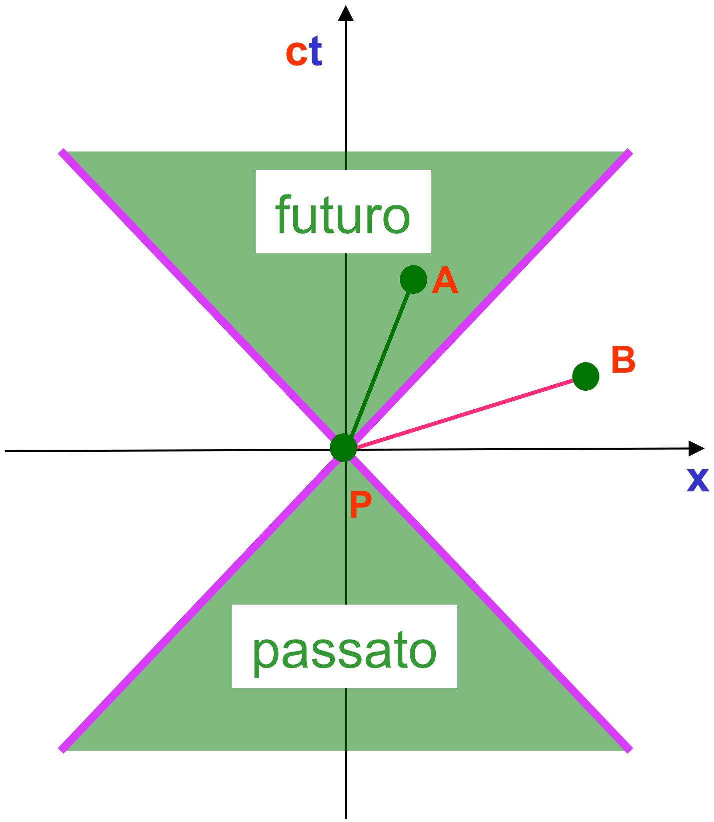
metrica: (+,-,-,-) $\longrightarrow$ Spazio di Minkowski: geometria piatta pseudoEuclidea

# Spazio di Minkowski

(+,-,-,-) ⟶ $\Delta s^2$ $> 0$ intervallo "tempo"

$\Delta s^2 = 0$ intervallo "luce"

$\Delta s^2 < 0$ intervallo "spazio"




**cono di luce di P**

superficie 3-dim. in spaziotempo 4-dim. definita come luogo degli eventi a $s^2 = 0$ da P $\rightarrow$ $x = ct$ $\rightarrow$ traiettoria della luce emessa da P.

**interno del cono di luce di P**

insieme delle linee di universo delle particelle a massa $\neq 0$

# Spazio di Minkowski

varietà 4-dimensionale → **4-vettori**

- 4-vettore posizione **x** ≡ (ct, x, y, z): oggetto che si trasforma correttamente (i.e. lunghezza invariata) sotto **Lorentz**
- Particella a riposo: massa ma non energia addizionale. Osservatore in moto rispetto alla particella → massa a riposo + energia cinetica

⬇

oggetto che si trasforma correttamente sotto **Lorentz**:
4-vettore **energia-impulso**

$$\boxed{\mathcal{P} = \left(E, c\,\vec{P}\right)}$$

# Spazio di Minkowski

"lunghezza" del 4-vettore impulso-energia:

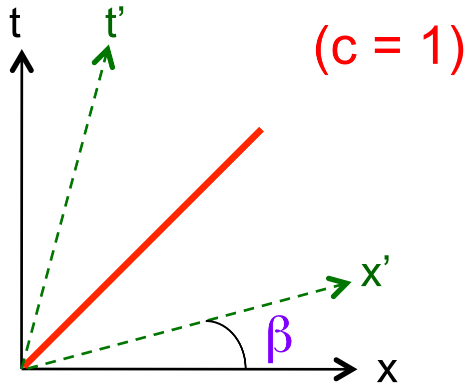
$$\mathcal{P}^2 = E^2 - c^2\,\vec{P}^2$$

particella in quiete $\longrightarrow$ $E = m\,c^2 \qquad \vec{P} = 0$

$$\mathcal{P}^2 = m^2\,c^4$$

invarianza della "lunghezza" $\longrightarrow$ $\boxed{E = c\sqrt{(m\,c)^2 + \vec{P}^2}}$

# Trasformazioni di Lorentz




$$x' = \gamma\,(x - \beta\,t)$$
$$t' = \gamma\,(t - \beta\,x)$$

asse t' : $x' = 0 \quad \rightarrow \quad x = \beta\,t \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{1}{\beta}\,x$

asse x' : $t' = 0 \quad \rightarrow \quad t = \beta\,x$

# Trasformazioni di Lorentz

- ✓ nella trasf. gli assi eseguono movimento a forbice. Gli assi sono ortogonali nella metrica pseudo-euclidea (non appaiono così perché li vediamo con il "pregiudizio euclideo")

- ✓ $\beta = 1 \quad \rightarrow \quad t' = x' \quad \rightarrow \quad x - \beta\, t = t - \beta\, x \quad \rightarrow \quad x = t$

  il cono di luce è invariante, i.e. la velocità della luce è la stessa in tutti i riferimenti inerziali

- ✓ chiaro il carattere relativo della simultaneità

# Trasformazioni di Lorentz

✓ $$\beta = \tanh\zeta \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\zeta}} = \cosh\zeta$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \cosh\zeta\, x - \sinh\zeta\, t \\ t' &= -\sinh\zeta\, x + \cosh\zeta\, t \end{aligned}}$$

le TL sono rotazioni in trigonometria iperbolica

# ? c = costante

tempo: parametro nella descrizione del moto → dimensione di varietà più estesa (spaziotempo)

analogamente al caso spaziale, possibile parlare di velocità nel tempo → definizione?

Esempio: oggetto in quiete → velocità nel tempo = c (ricordo che la 4^ dimensione nello spaziotempo è ct)

corpo in moto → parte della velocità nel tempo è trasferita nello spazio → velocità nel tempo diminuisce: ecco perché orologio in moto rallenta!!

i.e., moto nello spazio "ruba" un po' al moto nel tempo

# ? c = costante

4-vettore velocità:
$$u = \frac{\Delta x}{\Delta\tau} = \left(c\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau}, \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau}\right)$$
$$= \left(c\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau}, \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right)$$
$$= \frac{\Delta t}{\Delta\tau}\,(c, \vec{v})$$

NB –
$$(c\,\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 = (c\,\Delta\tau)^2$$
$$(c^2 - v^2)\,(\Delta t)^2 = (c\,\Delta\tau)^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \gamma$$

$$\boxed{u^2 = c^2\,\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2}$$

# ? c = costante

norma del 4-vettore u = c → tutti gli oggetti (anche quelli fermi nello spazio) sono in moto nello spaziotempo con una velocità fissa, quella della luce!

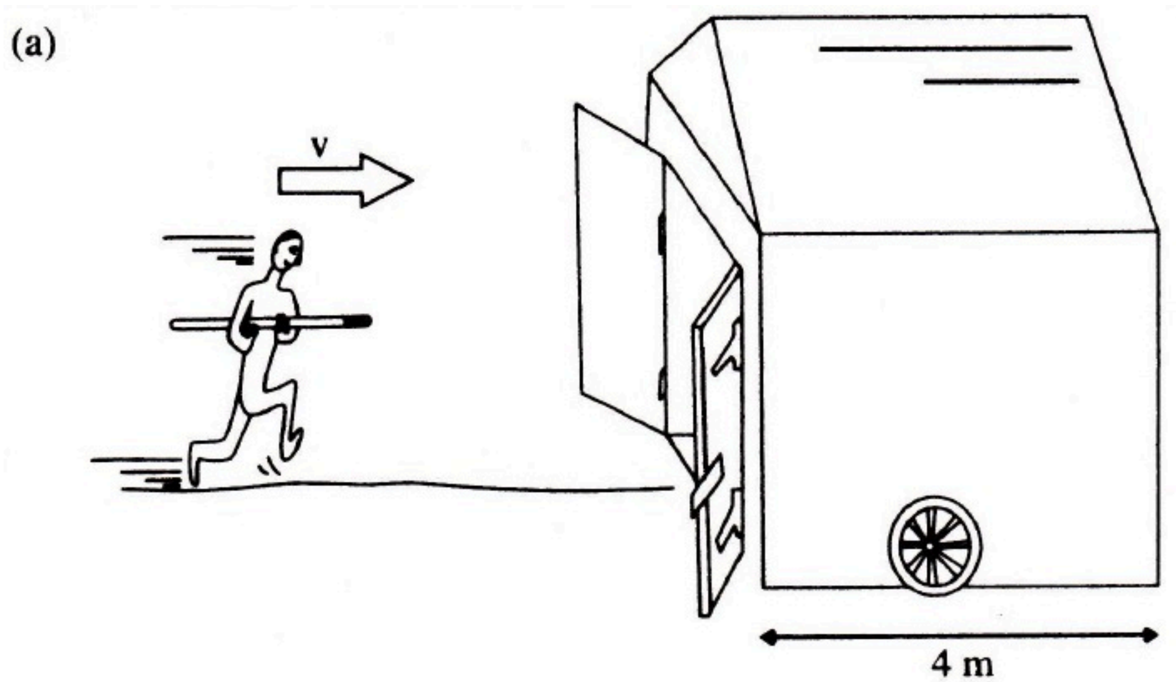
⇓

✓ ∃ una sola velocità: c → ecco perché interviene nelle eq. di Maxwell: è l'unica velocità che esiste in natura

✓ ecco perché esiste una velocità spaziale limite; la max. velocità spaziale possibile si ha quando tutta la velocità nel tempo è trasferita nello spazio: tutta la velocità spaziotemporale è usata per muoversi nel solo spazio → la luce non ha velocità nel tempo, i.e., alla velocità della luce, il tempo non passa

# Paradosso: palo e fienile

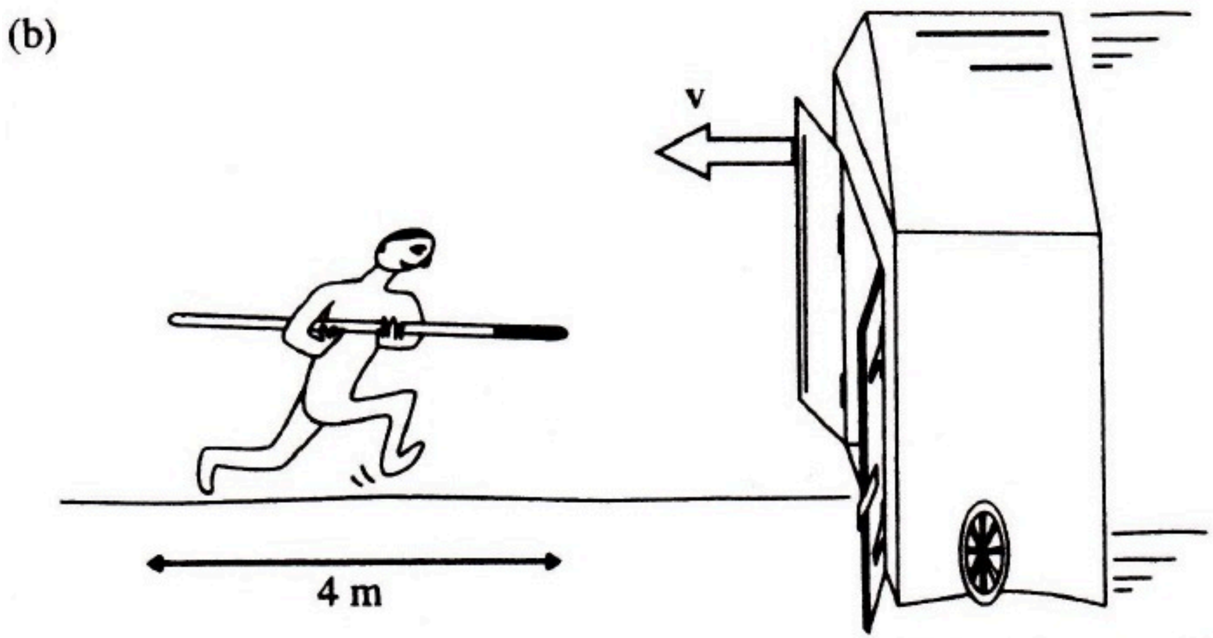
palo e fienile: lunghi (a riposo) entrambi 4 m; v tale che $\gamma = 2$ → riferimento del fienile: palo è lungo 2 m → completamente contenuto nel fienile




quando coda del palo è entrata nel fienile, la porta frontale viene chiusa; appena punta giunge alla porta sul retro, questa viene aperta

# Paradosso: palo e fienile

riferimento dell'atleta: fermo con palo di 4 m con un fienile di soli 2 m (!!) che gli piomba addosso ad alta velocità → il palo non può essere interamente contenuto nel fienile → le porte del fienile non possono essere entrambe chiuse (con il palo all'interno)



# Paradosso: palo e fienile

diagramma spaziotemporale

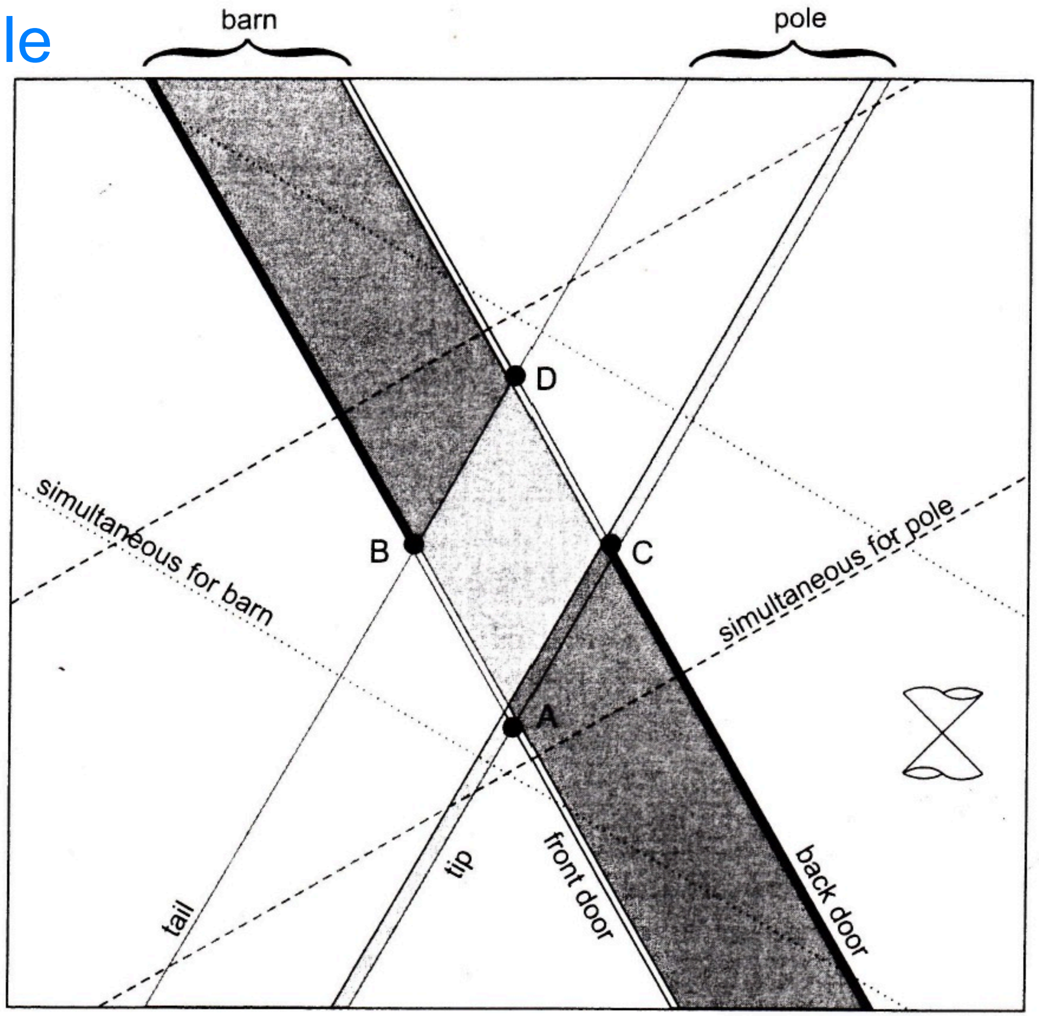
A = punta palo entra nel fienile

B = coda palo entra nel fienile
→ chiusura porta frontale

C = punta palo esce dal fienile
→ apertura porta posteriore

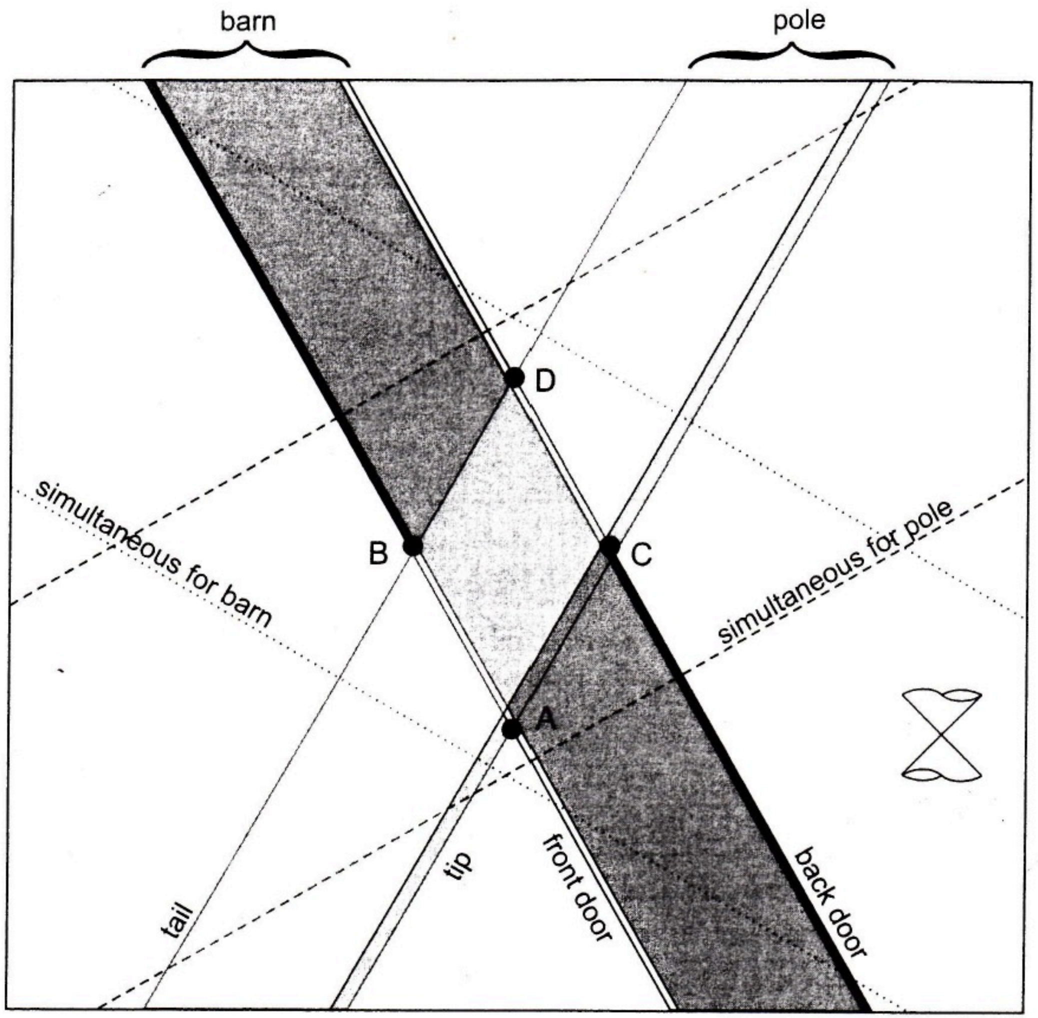
D = coda palo esce dal fienile
→ chiusura porta posteriore

Riferimento del fienile:
scivolamento linea di
simultaneità fienile →
sequenza temporale
eventi è ABCD



# Paradosso: palo e fienile

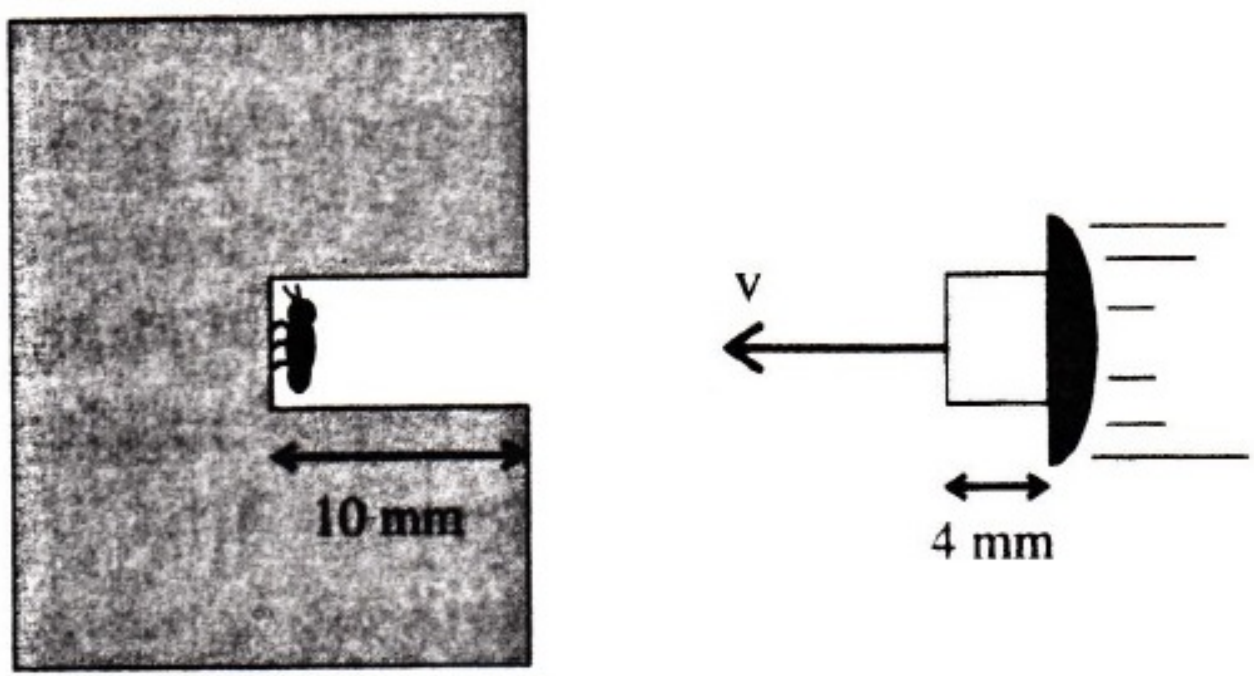
Riferimento dell'atleta: scivolamento linea di simultaneità del palo → sequenza temporale eventi è ACBD, i.e. punta del palo esce dal fienile (C) prima che la coda raggiunga la porta frontale (B) → palo mai interamente contenuto nel fienile: nessuna contraddizione: ∃un singolo insieme di eventi nello spaziotempo



# Paradosso: pulce e chiodo

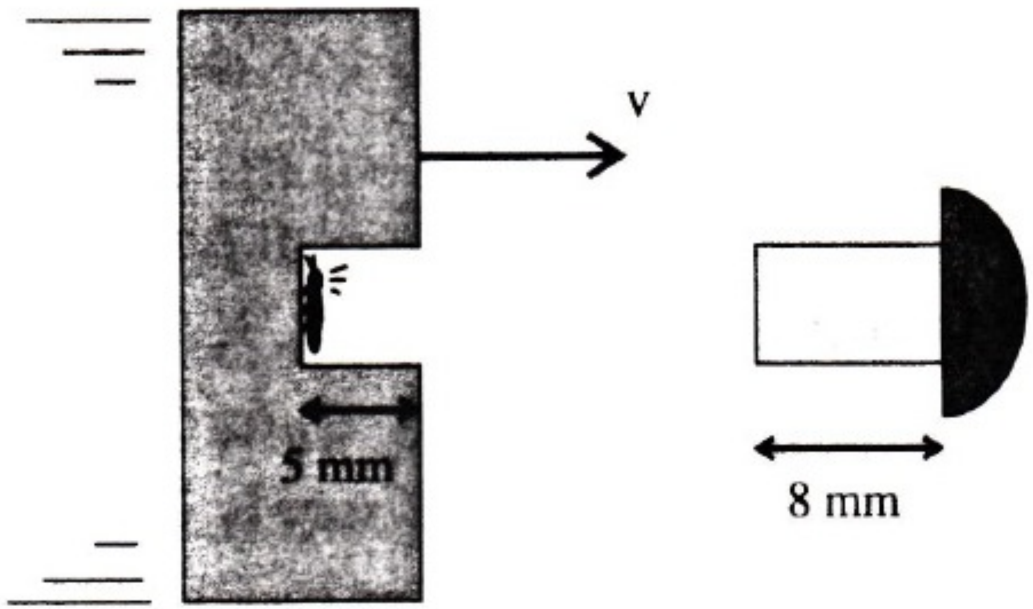
pulce rannicchiata dentro buco profondo 10 mm entro cui si spara chiodo lungo a riposo 8 mm con v tale che $\gamma = 2$

riferimento della pulce: chiodo lungo 4 mm → la pulce si sente al sicuro



# Paradosso: pulce e chiodo

riferimento del chiodo: buco profondo 5 mm → la pulce viene schiacciata




Soluzione del paradosso → tener presente che:

# Paradosso: pulce e chiodo

1. sorte della pulce non dipende dal riferimento; tutti gli osservatori devono concordare: si può essere in disaccordo solo tempo e distanza tra i vari eventi;
2. riferimento da usare per la discussione è quello dove la descrizione è più semplice → riferimento del chiodo → la pulce deve morire!

… quando la testa del chiodo arriva all'ingresso del foro, la punta non interrompe il suo moto: info sull'impedimento al moto impiega un po' per arrivare alla punta del chiodo → nel riferimento della pulce chiodo comincia ad allungarsi fino a toccare il fondo, schiacciando la pulce prima di contrarsi alla lunghezza originaria

# Paradosso: pulce e chiodo